

一类具有脉冲的二阶随机发展方程 温和解的存在性

吴博, 范虹霞

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要:在 Hilbert 空间中研究一类具有瞬时脉冲的二阶非自治随机发展方程温和解的存在性。在不要求发展系统紧性的条件下, 利用 Sadovskii's 不动点定理和非紧性测度理论得到了该方程温和解的存在性结论, 并给出一个例子说明了所获的结果。

关键词:随机发展方程; 非紧性测度; Sadovskii's 不动点定理; 瞬时脉冲; 温和解

DOI:10.15938/j.jhust.2023.05.016

中图分类号: O175.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)05-0128-08

Existence of Mild Solutions for a Class of Second-order Stochastic Evolution Equations with Impulses

WU Bo, FAN Hongxia

(College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The existence of mild solutions for a class of second-order non-autonomous stochastic evolution equations with instantaneous impulses is studied in Hilbert space. By using Sadovskii's fixed point theorem and the theory of measure of noncompactness, the existence of the mild solution of the equation is obtained without the necessity of assuming that the corresponding evolution family is noncompact. Finally, one example is given to illustrate our main results.

Keywords: Stochastic evolution equation; measure of noncompactness; Sadovskii's fixed point theorem; instantaneous impulse; mild solution

0 引言

在机械、电子信息、金融市场等诸多领域, 都存在着在一定时间内的瞬时扰动和突变, 通常将这种变化称为脉冲效应。近几十年来, 脉冲常微分方程、脉冲偏微分方程及脉冲分数阶微分方程被广泛研究^[1-3]。由于噪声或随机扰动在自然界和人工系统中都是不可避免的, 所以脉冲随机微分发展方程自然地出现在广泛的应用领域^[4-6]。2020年, SINGH等^[7]利用 Banach 压缩映射原理研究了下列

二阶非自治随机脉冲微分方程

$$\left. \begin{aligned} dy'(t) &= [A(t)y(t) + Bu(t) + F(t, y(t))]dt + \\ &\quad G(t, y(t))dW(t), t \in [0, T], t \neq t_k \\ y(0) &= \varphi, y' = \chi \\ \Delta y(t_k) &= I_k(y(t_k)), k = 1, 2, 3, \dots, m \\ \Delta y'(t_k) &= J_k(y(t_k)), k = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\}$$

温和解的存在唯一性和近似可控性。

非局部问题是由 BYSZEWSKI^[8]首次提出的, 与经典的初值问题相比, 非局部问题在实际的物理问题中有更广泛的应用, 因此得到了学者的广泛关

收稿日期: 2022-04-15

基金项目: 国家自然科学基金(11561040)。

作者简介: 吴博(1999—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 范虹霞(1978—), 女, 教授, E-mail: ffls0217@126.com。

注和深入研究。2021年, CHEN^[9] 在发展系统非紧的条件下, 利用非紧性测度理论和不动点定理, 在 Hilbert 空间中研究了如下具有非线性噪声和非局部初始条件的非自治随机发展方程

$$\left. \begin{aligned} du(t) &= [A(t)u(t) + f(t, u(t))]dt + \\ &\quad g(t, u(t))dW(t), t \in J \\ u(0) &= H(u) \end{aligned} \right\}$$

温和解的存在性。

受上述文献的启发, 本文研究具有瞬时脉冲的二阶非自治随机发展方程非局部问题

$$\left. \begin{aligned} du'(t) &= [A(t)u(t) + f(t, u(t))]dt + \\ &\quad g(t, u(t))dW(t), t \in [0, a], t \neq t_k \\ u(0) &= h_1(u) \\ u'(0) &= h_2(u) \\ \Delta u(t_k) &= I_k(u(t_k)) \\ \Delta u'(t_k) &= J_k(u(t_k)), k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

温和解的存在性, 其中状态函数 $u(\cdot)$ 取值于实可分 Hilbert 空间 H 中, H 中的内积与范数分别为 $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$, $A(t):D(A(t)) \subset H \rightarrow H$ 是闭线性算子, 其定义域 $D(A(t)) = D(A)$ 在 H 中稠密且与 t 无关。令 K 为另一实可分 Hilbert 空间, 其内积和范数分别为 $(\cdot, \cdot)_K$ 和 $\|\cdot\|_K$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = a$, 其中 $a > 0$ 为常数。设 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个具有 σ 流 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间, $\{W(t): t \geq 0\}$ 为定义在 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 空间的一个 K -值 Wiener 过程。使用相同的符号 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathcal{L}(K, H)$ 的范数, 其中 $\mathcal{L}(K, H)$ 表示从 K 到 H 的所有有界线性算子构成的空间。 $L^2(\Omega, H)$ 表示所有强可测、平方可积 H -值随机变量所构成的空间。 $f: [0, a] \times L^2(\Omega, H) \rightarrow L^2(\Omega, H)$, $g: [0, a] \times L^2(\Omega, H) \rightarrow \mathcal{L}(K, H)$, 及 $h_i: [0, a] \times H \rightarrow H, i = 1, 2$ 为连续函数。且 $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, 其中 $u(t_k^+)$ 和 $u(t_k^-)$ 分别表示 $u(t_k)$ 在 $t = t_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 的右极限和左极限, $\Delta u'(t_k) = u'(t_k^+) - u'(t_k^-)$ 具有相同的含义。

1 预备知识

假设 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 为一完备赋流概率空间, 流 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 为 F 的一列右连续单调递增的子 σ -代数族, 并且 F_0 包含所有概率测度为 0 的集合。令 $\{e_k, k \in \mathcal{N}\}$ 为 K 中的一组完备标准正交基, 假设 $\{W(t): t \geq 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0},$

$P)$ 上具有有限迹协方差算子 $Q \geq 0$ 的圆柱形 K -值 Wiener 过程, 记 $Tr(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \lambda < \infty$ 且满足 $Qe_k = \lambda_k e_k, k \in \mathcal{N}$ 。令 $\{W_k(t), k \in \mathcal{N}\}$ 为一列在 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上相互独立的一维标准 Wiener 过程, 则其满足 $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} W_k(t) e_k$ 。设 $F_t = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ 是由 W 和 $F_b = F$ 所生成的 σ -代数。对 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(K, H)$, 定义 $(\varphi, \psi) = Tr(\varphi Q \psi^*)$, 其中 ψ^* 是 ψ 的伴随算子。对任意有界算子 $\psi \in \mathcal{L}(K, H)$, 有 $\|\psi\|_Q^2 = Tr(\psi Q \psi^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \|\sqrt{\lambda_k} \psi e_k\|^2$ 。若 $\|\psi\|_Q^2 < \infty$, 则称 ψ 为 Q -Hilbert-Schmidt 算子。

令 $L^1([0, a], H)$ 表示所有 H -值 Bochner 积分函数构成的 Banach 空间, 范数定义为 $\|u\|_{L^1} = \int_0^a \|u(t)\| dt$ 。 $L^2(\Omega, H)$ 表示所有强可测、平方可积 H -值随机变量所构成的 Banach 空间, 赋以范数 $\|u(\cdot)\|_{L^2} = (E \|u(\cdot, W)\|^2)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $Eu = \int_{\Omega} u(W) dP$ 为数学期望。 $L^2(\Omega, H)$ 的子集 $L_0^2(\Omega, H)$, 记 $L_0^2(\Omega, H) = \{u \in L^2(\Omega, H) \mid u \text{ 是 } F_0\text{-可测的}\}$ 。记 $PC([0, a], L^2(\Omega, H)) = \{x: [0, a] \rightarrow L^2(\Omega, H), x \text{ 在 } t \neq t_k \text{ 时连续}, x(t_k^-) = x(t_k) \text{ 且 } x(t_k^+) \text{ 存在}, k = 1, 2, \dots, m\}$ 。显然, 赋予范数 $\|u\|_{PC} = (\sup_{t \in [0, a]} E \|u(t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 的 $PC([0, a], L^2(\Omega, H))$ 是一个 Banach 空间。令 $PC^1([0, a], L^2(\Omega, H)) = \{x \in PC: x' \text{ 在 } t \neq t_k \text{ 时连续}, x'(t_k^-) = x'(t_k) \text{ 且 } x'(t_k^+) \text{ 存在}, k = 1, 2, \dots, m\}$ 。于是具有范数 $\|x\|_1 = \|x\|_{PC} + \|x'\|_{PC}$ 的空间 $PC^1([0, a], L^2(\Omega, H))$ 也是一个 Banach 空间。

考虑抽象的二阶非自治发展方程初值问题

$$\left. \begin{aligned} x''(t) &= A(t)x(t) + f(t), 0 \leq t \leq a \\ x(t) &= x_0, x'(t) = y_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $A(t): D(A) \subset H \rightarrow H$ 是闭的稠定线性算子, $f: [0, a] \rightarrow H$ 为适当定义的函数, 对问题 (2) 温和解的研究都是基于与之对应的齐次发展方程

$$x''(t) = A(t)x(t), 0 \leq t \leq a$$

生成的发展系统 $S(t, s)$, 其中 $0 \leq s \leq t$ 。下面给出所需的发展系统 $S(t, s)$ 的定义。

定义 1^[10] 若有界线性算子族 $\{S(t, s)\}_{(t, s) \in \Delta} : H \rightarrow H, \Delta := \{(t, s) \in [0, a] \times [0, a] : s \leq t\}$, 满足下述条件:

(Z1) 对任意 $x \in H, (t, s) \rightarrow S(t, s)x$ 是连续可微的, 且

(a) 对 $\forall t \in [0, a], S(t, t) = I$;

(b) 对 $\forall (t, s) \in \Delta, x \in H, \frac{\partial}{\partial t} S(t, s)x|_{t=s} = x$,

及 $\frac{\partial}{\partial s} S(t, s)x|_{t=s} = -x$ 。

(Z2) 对 $\forall (t, s) \in \Delta$, 若 $x \in D(A)$, 则 $\frac{\partial}{\partial t} S(t, s)x \in D(A), (t, s) \rightarrow S(t, s)x \in H$ 是二阶连续可导的, 并且

(a) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} S(t, s)x = A(t)S(t, s)x$;

(b) $\frac{\partial^2}{\partial s^2} S(t, s)x = S(t, s)A(s)x$;

(c) $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} S(t, s)x|_{t=s} = 0$ 。

(Z3) 对 $\forall (t, s) \in \Delta$, 若 $x \in D(A)$, 则 $\frac{\partial}{\partial s} S(t, s)x \in D(A), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial s} S(t, s)x \in D(A), \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial t} S(t, s)x \in D(A)$, 并且

(a) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial s} S(t, s)x = A(t) \frac{\partial}{\partial s} S(t, s)x$;

(b) $\frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial t} S(t, s)x = \frac{\partial}{\partial t} S(t, s)A(s)x$ 。

此外, $(t, s) \rightarrow A(t) \frac{\partial}{\partial s} S(t, s)x$ 是连续的, 则称它为方程(2)的齐次发展方程的发展系统。

方便起见, 定义算子 $C(s, t) = -\frac{\partial}{\partial s} S(t, s)$, 假设存在正常数 M, N 使得

$$\sup_{0 \leq t, s \leq a} \|S(t, s)\| \leq M, \sup_{0 \leq t, s \leq a} \|C(t, s)\| \leq N \quad (3)$$

由算子 $C(t, s)$ 的强连续性, 对 $\forall (t, s) \in \Delta, x \in H$ 有

$$S(t, s)x = - \int_s^t \frac{\partial}{\partial \xi} S(t, \xi)x d\xi = \int_s^t C(t, s)x d\xi \quad (4)$$

下面给出有关 Kuratowski 非紧性测度的定义和性质。

定义 2^[11] 设 $S \subset X$ 有界, 则 S 有限覆盖最大直径的下确界

$$\alpha(S) := \inf \{ \delta > 0 \mid S = \bigcup_{i=1}^m S_i, d(S_i) \leq \delta, i = 1, \dots, m \}$$

为 S 的 Kuratowski 非紧性测度。

引理 1^[12] 设 X, Y 是实 Banach 空间, S, U 是 X 中的有界集, 则有下列性质:

1) S 相对紧 $\Leftrightarrow \alpha(S) = 0$;

2) $\alpha(S) = \alpha(\bar{S}) = \alpha(\text{conv} S)$, 其中 $\bar{S}$ 和 $\text{conv} S$ 分别是 S 的闭包和凸包;

3) 若 $S \subseteq U$, 则 $\alpha(S) \leq \alpha(U)$;

4) $\alpha(S + U) \leq \alpha(S) + \alpha(U)$, 其中 $S + U = \{x + y \mid x \in S, y \in U\}$;

5) $\alpha(S \cup U) \leq \max \{ \alpha(S), \alpha(U) \}$;

6) $\alpha(\lambda S) \leq |\lambda| \alpha(S)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$;

7) 若映射 $Q: D(Q) \subseteq X \rightarrow Y$ 是 Lipschitz 连续的, 且 Lipschitz 常数为 k , 则对任意的有界集 $S \subset D(Q)$, 有 $\alpha(Q(S)) \leq k\alpha(S)$ 。

本文用 $\alpha(\cdot)$ 和 $\alpha_{PC}(\cdot)$ 分别表示 $L^2(\Omega, H)$ 和 $PC([0, a], L^2(\Omega, H))$ 中有界集的 Kuratowski 非紧性测度。

引理 2^[12] 设 X 是 Banach 空间, $D \subset PC([0, a], X)$ 是有界且等度连续集, 则 $\alpha(D(t))$ 在 $[0, a]$ 上连续, 并且 $\alpha_{PC}(D) = \max_{t \in [0, a]} \alpha(D(t))$ 。

引理 3^[13] 设 X 是 Banach 空间, $D \subset X$ 有界, 则存在可数集 $D_0 \subset D$, 使得 $\alpha(D) \leq 2\alpha(D_0)$ 。

引理 4^[14] 设 X 是 Banach 空间, $D = \{u_n\} \subset PC([0, a], X)$ 是有界可数集, 则 $\alpha(D(t))$ 在 X 上 Lebesgue 可积, 并且

$$\alpha(\{ \int_0^a u_n(t) dt : n \in \mathbb{N} \}) \leq 2 \int_0^a \alpha(D(t)) dt$$

定义 3^[15] 若函数 $t \mapsto S(t, s)$ 对于 $t \in (s, +\infty)$ 依算子范数连续, 则称发展族 $\{S(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq a\}$ 为等度连续的。

引理 5^[16] 若函数 $g: [0, a] \times L^2(\Omega, H) \rightarrow \mathcal{L}(K, H)$ 连续且 $u \in PC([0, a], L^2(\Omega, H))$ 则

$$E \| \int_0^a g(t, u(t)) dW(t) \|^2 \leq \text{Tr}(Q) \int_0^a E \| g(t, u(t)) \|^2 dt.$$

定义 4^[17] 设 S 是 Banach 空间 X 中的一个非空子集, 若对任意有界集 $D \subset S$, 满足 $\alpha(Q(D)) < \alpha(D)$, 则连续映射 $Q: S \rightarrow X$ 称为凝聚的。

定理 1^[17] (Sadovskii's 不动点定理) 设 X 是 Banach 空间, $D \subset X$ 为有界凸闭集, 若 $Q: D \rightarrow D$ 是凝聚算子, 则 Q 在 D 上至少有一个不动点。

下面给出问题(1)温和解的定义。

定义 5 若随机过程 $u \in PC([0, a], L^2(\Omega,$

H) 满足下列条件

1) $u(t)$ 是 F_t - 适应的过程;

2) 对几乎处处的 $t \in [0, a], u(t) \in H$ 有 càdlàg 路径 (右连续左极限存在);

3) 对 $\forall t \in [0, a]$, 有

$$u(t) = C(t, 0)h_1(u) + S(t, 0)h_2(u) +$$

$$\int_0^t S(t, s)f(s, u(s))ds +$$

$$\int_0^t S(t, s)g(s, u(s))dW(s) +$$

$$\sum_{0 < t_k < t} C(t, t_k)I_k(u(t_k)) +$$

$$\sum_{0 < t_k < t} S(t, t_k)J_k(u(t_k)), k = 1, 2, \dots, m$$

则称 u 是非局部问题(1) 的温和解。

令 $r > 0$ 为有限常数, 记

$$B_r = \{u \in PC([0, a], L^2(\Omega, H)) : \|u\|_{PC}^2 \leq r\}.$$

2 主要结论

为了得到问题(1) 温和的存在性, 给出下列假设条件:

(H₁) 对 $\forall (t, s) \in \Delta, A(t)$ 生成的强连续发展系统 $S(t, s)$ 等度连续。

(H₂) 函数 $f: [0, a] \times L^2(\Omega, H) \rightarrow L^2(\Omega, H)$ 连续, 对于 $r > 0$, 存在正常数 ρ_1 及函数 $\varphi_r \in L^1([0, a], \mathbb{R}^+)$, 使得对几乎处处 $t \in [0, a], \forall u \in L^2(\Omega, H)$ 满足 $E \|u(t)\|^2 \leq r$, 有

$$E \|f(t, u)\|^2 \leq \varphi_r(t), \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\|\varphi_r\|_{L^1([0, a], \mathbb{R}^+)}}{r} := \rho_1 < +\infty.$$

(H₃) 函数 $g: [0, a] \times L^2(\Omega, H) \rightarrow \mathcal{L}(K, H)$ 连续, 对于 $r > 0$, 存在正常数 ρ_2 及函数 $\psi_r \in L^1([0, a], \mathbb{R}^+)$, 使得对几乎处处 $t \in [0, a], \forall u \in L^2(\Omega, H)$ 满足 $E \|u(t)\|^2 \leq r$, 有

$$E \|g(t, u)\|^2 \leq \psi_r(t), \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\|\psi_r\|_{L^1([0, a], \mathbb{R}^+)}}{r} := \rho_2 < +\infty.$$

(H₄) 函数 $h_1, h_2: PC([0, a], L^2(\Omega, H)) \rightarrow L^2(\Omega, H)$ 连续, 存在正常数 ρ_3, ρ_4 及非减连续函数 $\Psi_1, \Psi_2: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 使得对 $r > 0, \forall u \in B_r$, 有

$$E \|h_1(u)\|^2 \leq \Psi_1(r), \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\Psi_1(r)}{r} := \rho_3 < +\infty,$$

$$E \|h_2(u)\|^2 \leq \Psi_2(r), \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\Psi_2(r)}{r} := \rho_4 < +\infty.$$

(H₅) 脉冲函数 $I_k, J_k: H \rightarrow H, k = 1, 2, \dots, m$ 连续, 存在正常数 $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots, m$, 使得对 $\forall u, v \in H$ 有

$$\|I_k(u) - I_k(v)\|^2 \leq a_k \|u - v\|^2, \|I_k(0)\| = 0,$$

$$\|J_k(u) - J_k(v)\|^2 \leq b_k \|u - v\|^2, \|J_k(0)\| = 0.$$

(H₆) 存在正常数 $L_f, L_g, L_{h_1}, L_{h_2}, L_{I_k}, L_{J_k}$, 其中 $k = 1, 2, \dots, m$, 对有界可数子集 $D \subset PC([0, a], L^2(\Omega, H))$, $\forall t \in [0, a]$ 有

$$\begin{aligned} \alpha(f(t, D)) &< L_f \alpha_{PC}(D), \alpha(g(t, D)) < L_g \alpha_{PC}(D), \\ \alpha(h_1(D)) &< L_{h_1} \alpha_{PC}(D), \alpha(h_2(D)) < L_{h_2} \alpha_{PC}(D), \\ \alpha(I_k(D)) &< L_{I_k} \alpha_{PC}(D), \alpha(J_k(D)) < L_{J_k} \alpha_{PC}(D). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H_7) 2N[L_{h_1} + \sum_{k=1}^m L_{I_k}] + 2M[L_{h_2} + 2aL_f + \\ \sqrt{2aTr(Q)}L_g + \sum_{k=1}^m L_{J_k}] < 1. \end{aligned}$$

定理 2 若假设条件(H₁) ~ (H₇) 成立, 且

$$6N^2(\rho_3 + m \sum_{k=1}^m a_k) + 6M^2(ap_1 + Tr(Q)\rho_2 + \rho_4 +$$

$$m \sum_{k=1}^m b_k) < 1 \quad (5)$$

则问题(1) 在区间 $[0, a]$ 上至少存在一个温和解。

证明: 定义算子 $Q: PC([0, a], L^2(\Omega, H)) \rightarrow PC([0, a], L^2(\Omega, H))$ 如下:

$$\begin{aligned} (Qu)(t) &= C(t, 0)h_1(u) + S(t, 0)h_2(u) + \\ &\int_0^t S(t, s)f(s, u(s))ds + \\ &\int_0^t S(t, s)g(s, u(s))dW(s) + \\ &\sum_{0 < t_k < t} C(t, t_k)I_k(u(t_k)) + \\ &\sum_{0 < t_k < t} S(t, t_k)J_k(u(t_k)), t \in [0, a] \end{aligned} \quad (6)$$

显然 $u(t)$ 为问题(1) 的温和解当且仅当 $u(t)$ 为算子 Q 的不动点, 下证算子 Q 存在不动点。

第一步: 证明存在常数 $r > 0$, 使得 $Q: B_r \rightarrow B_r$, 如若不然, 对任意的 $r > 0$, 存在 $u_r \in B_r, t_r \in [0, a]$, 使得 $E \|(Qu_r)(t_r)\|^2 > r$ 。由引理 5, Hölder 不等式, 式(3)、式(6) 及条件(H₂) ~ (H₅) 得

$$\begin{aligned} r < E \|(Qu_r)(t_r)\|^2 &\leq 6N^2 E \|h_1(u_r)\|^2 + \\ &6M^2 E \|h_2(u_r)\|^2 + 6M^2 t_r \int_0^{t_r} E \|f(s, u_r(s))\|^2 ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 6M^2 Tr(Q) \int_0^t E \|g(s, u_r(s))\|^2 ds + \\
& 6mN^2 \sum_{k=1}^m a_k r + 6mM^2 \sum_{k=1}^m b_k r \leq \\
& 6N^2 \Psi_1(r) + 6M^2 \Psi_2(r) + 6M^2 a \| \varphi_r \|_{L^1([0,a], \mathbb{R}^+)} + \\
& 6M^2 Tr(Q) \| \psi_r \|_{L^1([0,a], \mathbb{R}^+)} + \\
& 6mN^2 \sum_{k=1}^m a_k r + 6mM^2 \sum_{k=1}^m b_k r.
\end{aligned}$$

上式两边同时除以 r , 并令 $r \rightarrow +\infty$, 由条件 $(H_2) \sim (H_4)$ 可得

$$\begin{aligned}
1 & \leq 6N^2(\rho_3 + m \sum_{k=1}^m a_k) + 6M^2(a\rho_1 + Tr(Q)\rho_2 + \\
& \rho_4 + m \sum_{k=1}^m b_k),
\end{aligned}$$

这与式(5)矛盾, 故 $Q:B_r \rightarrow B_r$.

第二步: 证明算子 $Q:B_r \rightarrow B_r$ 连续。设 $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset B_r$ 是一个序列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u, u \in B_r$, 由函数 f, g, h_1, h_2, I_k, J_k 连续性可知, 当 $n \rightarrow +\infty$ 有

$$E \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|^2 \rightarrow 0, \text{ a. e. } s \in [0, a] \quad (7)$$

$$E \|g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))\|^2 \rightarrow 0, \text{ a. e. } s \in [0, a] \quad (8)$$

$$E \|h_i(u_n) - h_i(u)\|^2 \rightarrow 0, i = 1, 2 \quad (9)$$

$$E \|I_k(u_n(t_k)) - I_k(u(t_k))\|^2 \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

$$E \|J_k(u_n(t_k)) - J_k(u(t_k))\|^2 \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

因此, 由条件 $(H_2), (H_3)$, 对几乎处处 $s \in [0, a]$ 有

$$\begin{aligned}
& E \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|^2 \leq \\
& 2E \|f(s, u_n(s))\|^2 + 2E \|f(s, u(s))\|^2 \leq \\
& 4\varphi_r(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E \|g(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|^2 \leq \\
& 2E \|g(s, u_n(s))\|^2 + 2E \|g(s, u(s))\|^2 \leq \\
& 4\psi_r(s).
\end{aligned}$$

由于对几乎处处的 $s \in [0, t]$, 所有的 $t \in [0, a]$, 函数 $s \rightarrow 4\varphi_r(s)$ 和 $s \rightarrow 4\psi_r(s)$ 是Lebesgue可积的。结合式(3)、式(6)~(11), 引理5, Hölder不等式及Lebesgue控制收敛定理, 对 $\forall t \in [0, a]$ 有

$$\begin{aligned}
& E \|(Qu_n)(t) - (Qu)(t)\|^2 \leq \\
& 6E \|C(t, s)(h_1(u_n) - h_1(u))\|^2 + \\
& 6E \|S(t, s)(h_2(u_n) - h_2(u))\|^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 6E \left\| \int_0^t S(t, s)[f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))] ds \right\|^2 + \\
& 6E \left\| \int_0^t S(t, s)[g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))] dW(s) \right\|^2 + \\
& 6E \left\| \sum_{0 < t_k < t} C(t, t_k)[I_k(u_n(t_k)) - I_k(u(t_k))] \right\|^2 + \\
& 6E \left\| \sum_{0 < t_k < t} S(t, t_k)[J_k(u_n(t_k)) - J_k(u(t_k))] \right\|^2 \leq \\
& 6N^2 E \|h_1(u_n) - h_1(u)\|^2 + 6M^2 E \|h_2(u_n) - h_2(u)\|^2 + \\
& 6M^2 a \int_0^t E \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|^2 ds + \\
& 6M^2 Tr(Q) \int_0^t E \|g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))\|^2 ds + \\
& 6mN^2 \sum_{k=1}^m E \|I_k(u_n(t_k)) - I_k(u(t_k))\|^2 + \\
& 6mM^2 \sum_{k=1}^m E \|J_k(u_n(t_k)) - J_k(u(t_k))\|^2 \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$,

因此, 算子 $Q:B_r \rightarrow B_r$ 连续。

第三步: 证明算子 $Q:B_r \rightarrow B_r$ 等度连续。对于 $\forall u \in B_r$, 取 $0 \leq t_1 < t_2 \leq a$, 由式(6)、条件 $(H_2), (H_3), (H_5)$, 引理5及Hölder不等式有

$$\begin{aligned}
& E \|(Qu)(t_2) - (Qu)(t_1)\|^2 \leq \\
& 10E \|[C(t_2, 0) - C(t_1, 0)]h_1(u)\|^2 + \\
& 10E \|[S(t_2, 0) - S(t_1, 0)]h_2(u)\|^2 + \\
& 10E \left\| \int_0^{t_1} [S(t_2, s) - S(t_1, s)]f(s, u(s)) ds \right\|^2 + \\
& 10E \left\| \int_{t_1}^{t_2} S(t_2, s)f(s, u(s)) ds \right\|^2 + \\
& 10E \left\| \int_0^{t_1} [S(t_2, s) - S(t_1, s)]g(s, u(s)) dW(s) \right\|^2 + \\
& 10E \left\| \int_{t_1}^{t_2} S(t_2, s)g(s, u(s)) dW(s) \right\|^2 + \\
& 10 \sum_{0 < t_k < t_1} E \|[C(t_2, t_k) - C(t_1, t_k)]I_k(u(t_k))\|^2 + \\
& 10 \sum_{t_1 < t_k < t_2} E \|C(t_2, t_k)I_k(u(t_k))\|^2 + \\
& 10 \sum_{0 < t_k < t_1} E \|[S(t_2, t_k) - S(t_1, t_k)]J_k(u(t_k))\|^2 + \\
& 10 \sum_{t_1 < t_k < t_2} E \|S(t_2, t_k)J_k(u(t_k))\|^2 \leq \\
& 10E \|[C(t_2, 0) - C(t_1, 0)]h_1(u)\|^2 + \\
& 10E \|[S(t_2, 0) - S(t_1, 0)]h_2(u)\|^2 + \\
& 10t_1 \int_0^{t_1} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \varphi_r(s) ds + \\
& 10M^2(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_r(s) ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10Tr(Q) \int_0^{t_1} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \psi_r(s) ds + \\
& 10Tr(Q) M^2 \int_{t_1}^{t_2} \psi_r(s) ds + \\
& 10m \sum_{k=1}^m a_k r E \|C(t_2, t_k) - C(t_1, t_k)\|^2 + \\
& 10 \sum_{t_1 < t_k < t_2} E \|C(t_2, t_k) I_k(u(t_k))\|^2 + \\
& 10m \sum_{k=1}^m b_k r E \|S(t_2, t_k) - S(t_1, t_k)\|^2 + \\
& 10 \sum_{t_1 < t_k < t_2} E \|S(t_2, t_k) J_k(u(t_k))\|^2 := \sum_{i=1}^{10} K_i.
\end{aligned}$$

因为对 $\forall (t, s) \in \Delta, C(t, s), S(t, s)$ 是强连续的, 所以当 $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ 时, $K_1, K_2, K_7, K_8, K_9, K_{10} \rightarrow 0$.

设 $\delta > 0$ 充分小, 由式(3)、定义3、条件(H₁), Lebesgue 控制收敛定理及 δ 的任意性得

$$\begin{aligned}
K_3 & \leq 10t_1 \int_0^{t_1-\delta} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \varphi_r(s) ds + \\
& 10t_1 \int_{t_1-\delta}^{t_1} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \varphi_r(s) ds \leq \\
& 10t_1 \int_0^{t_1-\delta} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \varphi_r(s) ds + \\
& 20M^2 t_1 \int_{t_1-\delta}^{t_1} \varphi_r(s) ds \rightarrow 0, t_2 - t_1 \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \\
K_5 & \leq 10Tr(Q) \int_0^{t_1-\delta} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \psi_r(s) ds + \\
& 10Tr(Q) \int_{t_1-\delta}^{t_1} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \psi_r(s) ds \leq \\
& 10Tr(Q) \int_0^{t_1-\delta} \|S(t_2, s) - S(t_1, s)\|^2 \psi_r(s) ds + \\
& 20M^2 Tr(Q) \int_{t_1-\delta}^{t_1} \psi_r(s) ds \rightarrow 0, t_2 - t_1 \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \\
K_4 & = 10M^2 (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_r(s) ds \rightarrow 0, t_2 - t_1 \rightarrow 0, \\
K_6 & = 10M^2 Tr(Q) \int_{t_1}^{t_2} \psi_r(s) ds \rightarrow 0, t_2 - t_1 \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

综上所述, 当 $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ 时, $E \|(Qu)(t_2) - (Qu)(t_1)\|^2 \rightarrow 0$. 即算子 $Q: B_r \rightarrow B_r$ 等度连续。

第四步: 证明算子 $Q: B_r \rightarrow B_r$ 是凝聚算子。对任意的有界集 $D \subset B_r$, 由引理3可知, 存在一个可数集 $D_0 = \{u_n\} \subset D$, 使

$$\alpha_{PC}(Q(D)) \leq 2\alpha_{PC}(Q(D_0)) \quad (12)$$

因为 $Q(D_0) \subset Q(B_r)$ 有界且等度连续, 故由引理2可知

$$\alpha_{PC}(Q(D_0)) = \max_{t \in [0, a]} \alpha(Q(D_0)(t)) \quad (13)$$

对 $\forall u_1, u_2 \in D_0$, 由引理5得

$$E \left\| \int_0^t S(t, s) g(s, u_1(s)) dW(s) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t S(t, s) g(s, u_2(s)) dW(s) \|^2 \leq \\
& M^2 Tr(Q) \int_0^t E \|g(s, u_1(s)) - g(s, u_2(s))\|^2 ds,
\end{aligned}$$

结合引理17, 引理4及 $\|u(\cdot)\|_{L^2} = (E \|u(\cdot, W)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 可得

$$\begin{aligned}
& \alpha \left(\int_0^t S(t, s) g(s, D_0(s)) dW(s) \right) \leq \\
& M(2Tr(Q) \int_0^t [\alpha(g(s, D_0(s)))]^2 ds)^{\frac{1}{2}} \quad (14)
\end{aligned}$$

因此, 由引理1、引理4、式(3)、式(6)、式(12)、式(14)、条件(H₆) 得到

$$\begin{aligned}
& \alpha(Q(D_0)(t)) \leq \alpha(\{C(t, 0)h_1(u_n)\}) + \\
& \alpha(\{S(t, 0)h_2(u_n)\}) + \\
& \alpha(\{\int_0^t S(t, s)f(s, u_n(s)) ds\}) + \\
& \alpha(\{\int_0^t S(t, s)g(s, u_n(s)) dW(s)\}) + \\
& \alpha(\{\sum_{0 < t_k < t} C(t, t_k)I_k(u_n(t_k))\}) + \\
& \alpha(\{\sum_{0 < t_k < t} S(t, t_k)J_k(u_n(t_k))\}) \leq \\
& NL_{h_1}\alpha_{PC}(D_0) + ML_{h_2}\alpha_{PC}(D_0) + \\
& 2M \int_0^t \alpha(\{f(s, u_n(s))\}) ds + \\
& M(2Tr(Q) \int_0^t [\alpha(g(s, D_0(s)))]^2 ds)^{\frac{1}{2}} + \\
& N \sum_{k=1}^m L_{I_k} \alpha(\{u_n(t_k)\}) + \\
& M \sum_{k=1}^m L_{J_k} \alpha(\{u_n(t_k)\}) \leq \\
& (N[L_{h_1} + \sum_{k=1}^m L_{I_k}] + M[L_{h_2} + 2aL_f + \\
& \sqrt{2aTr(Q)}L_g + \sum_{k=1}^m L_{J_k}])\alpha_{PC}(D).
\end{aligned}$$

故由上式, 式(12)、式(13) 及条件(H₇) 得到

$$\begin{aligned}
& \alpha_{PC}(Q(D)) \leq (2N[L_{h_1} + \sum_{k=1}^m L_{I_k}] + 2M[L_{h_2} + 2aL_f + \\
& \sqrt{2aTr(Q)}L_g + \sum_{k=1}^m L_{J_k}])\alpha_{PC}(D) < \alpha_{PC}(D).
\end{aligned}$$

因此, 由定义4知算子 $Q: B_r \rightarrow B_r$ 是凝聚算子。

故由Sadovskii's 不动点定理可得算子 Q 在 B_r 上至少有一个不动点, 即问题(1) 在区间 $[0, a]$ 上至少有一个温和解。

3 实 例

考虑如下具有非局部初始条件和脉冲的二阶非

自治随机偏泛函微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= A(x,t,D)u(x,t) + \frac{\cos(\pi t)}{10 + |u(x,t)|} + \\ &\quad \frac{\sin(x,t,u(x,t))dW(t)}{10e^t dt} \\ t &\in [0,1] - (1/2), x \in \Theta \\ D^\alpha u(x,t) &= 0, (x,t) \in \partial\Theta \times [0,1], |\alpha| \leq n \\ u(x,0) &= \int_0^1 \frac{K_1(s)ds}{1 + |u(x,s)|}, x \in \Theta \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) &= \int_0^1 \frac{K_2(s)ds}{1 + |u(x,s)|}, x \in \Theta \\ u(x, (1/2)^+) - u(x, (1/2)^-) &= \frac{u(x, 1/2)}{20 + u(x, 1/2)} \\ u'(x, (1/2)^+) - u'(x, (1/2)^-) &= \frac{u'(x, 1/2)}{20 + u'(x, 1/2)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $\Theta \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Theta$ 的有界区域, $W(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上具有有限迹协方差算子 $Q \geq 0$ 的一维标准圆柱 Wiener 过程。

$$A(x,t,D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2n} a_\alpha(x,t) D^\alpha u$$

是 Θ 上一致强椭圆微分算子, 即存在一个常数 $C_1 > 0$ 使得对每个 $x \in \bar{\Theta}, t \in [0,1]$ 有

$$(-1)^n \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = 2n} a_\alpha(x,t) \xi^\alpha \geq C_1 \xi^{2n}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

系数 $a_\alpha(\cdot, t) \in C^{2n}(\bar{\Theta})$ 且 $a_\alpha(\cdot, t) [0,1] \times \mathbb{R}$ 是一致 Hölder 连续的, 即存在常数 $C_2 > 0$ 和 $0 < \eta \leq 1$ 使得对每个 $x \in \bar{\Theta}, t, s \in [0,1]$ 有

$$|a_\alpha(x,t) - a_\alpha(x,s)| \leq C_2 |t - s|^\eta.$$

此外, $K_1, K_2 \in L([0,1], \mathbb{R}^+)$ 。

令 $H = L^2(\Theta, \mathbb{R})$ 是一个 Hilbert 空间, 范数和内积分别为 $\|\cdot\|_2$ 和 $(\cdot)$ 。且

$$A(t) = A(x,t,D), Au(x) = u''(x),$$

$$D(A(t)) = H^{2n}(\Theta) \cap H_0^n(\Theta).$$

由文[7]、[9]、[15], 可知 $\{A(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ 生成一个等度连续的发展系统 $\{S(t,s) \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ 且满足定义 1。

对于 $\forall t \in [0,1], k = 1$ 定义

$$u(t) = u(\cdot, t), f(t, u(t)) = \frac{\cos(\pi t)}{10 + |u(\cdot, t)|},$$

$$g(t, u(t)) = \frac{\sin(x, t, u(x, t))}{10e^t}$$

$$h_1(u) = \int_0^1 \frac{K_1(s)ds}{1 + |u(\cdot, s)|}, h_2(u) = \int_0^1 \frac{K_2(s)ds}{1 + |u(\cdot, s)|},$$

$$I(u) = \frac{u}{20 + u}, J(u) = \frac{u'}{20 + u'},$$

则方程(15)可化为问题(1)的形式。这里 $m = 1$ 。

定理 3 若

$$5\sqrt{2Tr(Q)} < 19 \quad (16)$$

则方程(15)在区间 $[0,1]$ 上至少存在一个适度解。

证明: 根据函数 f, g, h_1, h_2 的定义, 当

$$\varphi_r(t) = \frac{\operatorname{mes}(\Theta) \cos^2(\pi t)}{100},$$

$$\psi_r(t) = \frac{\operatorname{mes}(\Theta) e^{-2t}}{100},$$

$$\Psi_1(r) = \operatorname{mes}(\Theta) \left(\int_0^1 K_1(s) ds \right),$$

$$\Psi_2(r) = \operatorname{mes}(\Theta) \left(\int_0^1 K_2(s) ds \right),$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0,$$

易知条件 $(H_2) \sim (H_4)$ 成立。此外, 函数 f, g 关于变量 u 是 Lipschitz 连续的, 且 Lipschitz 常数分别为

$\frac{1}{100}$ 和 $\frac{1}{10}$ 。根据文[21]可知非局部项 h_1, h_2 是紧算子, 因此由引理 1 和式(16)可得条件 $(H_5) \sim (H_7)$

及式(5)成立, 其中

$$M = N = 1, a_1 = b_1 = L_I = L_J = \frac{1}{20},$$

$$L_f = \frac{1}{100}, L_g = \frac{1}{10}, L_{h_1} = L_{h_2} = 0.$$

因此, 定理 2 中的所有条件都成立, 故由定理 2 可得方程(15)在区间 $[0,1]$ 上至少存在一个适度解。

4 结 论

定理 2 可以应用到一类带有非局部初始条件和脉冲的非自治随机偏泛函微分方程中, 因此, 定理 2 具有广泛的适用性。定理 2 在发展系统非紧的条件下, 利用非紧性测度和 Sadovskii's 不动点定理得到了温和解的存在性结论, 推广了文[18-20]的结果, 此外, 与一阶系统相比, 二阶系统能用来描述更具复杂性的现象, 比如炸弹在深水下的运动轨迹等。这使得定理 2 不同于以往对具有非局部初始条件的随机发展方程的研究, 因此, 定理 2 进一步丰富和完善了随机发展方程的相关研究结果。

参 考 文 献:

- [1] HERNÁNDEZ E, O'REGAN D. On a New Class of Abstract Impulsive Differential Equations[J]. Proceedings

- of American Mathematical Society, 2013, 141(5): 1641.
- [2] LI B L, GOU H D. Existence Results of Mild Solutions for Impulsive Fractional Evolution Equations with Periodic Boundary Condition[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2017, 18(7/8): 585.
- [3] ABADA N, CHAHDANE H, HAMMOUCHE H. Existence Results for Impulsive Partial Functional Fractional Differential Equation with State Dependent Delay[J]. Nonlinear Analysis: Problems, Applications and Computational Methods, 2021, 168: 1.
- [4] CHEN P Y, LI Y X, ZHANG X P. Cauchy Problem for Stochastic Non-autonomous Evolution Equations Governed by Noncompact Evolution Families[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2021, 26(3): 1531.
- [5] GAO D D, LI J L. Existence and Mean-square Exponential Stability of Mild Solutions for Impulsive Stochastic Partial Differential Equations with Noncompact Semigroup[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 484(1): 1.
- [6] DENG S F, SHU X B, MAO J Z. Existence and Exponential Stability for Impulsive Neutral Stochastic Functional Differential Equations Driven by fBm with Noncompact Semigroup Via Mönch Fixed Point[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 461(1), 398.
- [7] SINGH V, CHAUDHARY R, PANDEY D N. Approximate Controllability of Second-order Nonautonomous Stochastic Impulsive Differential Systems[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2020, 39(2): 339.
- [8] BYSZEWSKI L. Application of Properties of the Right Hand Sides of Evolution Equations to an Investigation of Nonlocal Evolution Problems[J]. Nonlinear Analysis, 1998, 33: 413.
- [9] CHEN P Y. Non-autonomous Stochastic Evolution Equations with Nonlinear Noise and Nonlocal Conditions Governed by Noncompact Evolution Families[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2021, 41(6): 2725.
- [11] HUANG H, WU Z, HU L, et al. Existence and Controllability of Second-order Neutral Impulsive Stochastic Evolution Integro-differential Equations with State-dependent Delay[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2018, 20(1): 2.
- [12] ZHANG X P, CHEN P Y, ABDELMONEM A, et al. Mild Solution of Stochastic Partial Differential Equation with Nonlocal Conditions and Noncompact Semigroups[J]. Mathematica Slovaca, 2019, 69(1): 111.
- [13] BANAS J, GOEBEL K. Measures of Noncompactness in Banach Spaces[M]. New York: Marcel Dekker, 1980.
- [14] CHEN P Y, LI Y X. Monotone Iterative Technique for a Class of Semilinear Evolution Equations with Nonlocal Conditions[J]. Results in Mathematics, 2013, 63(3/4): 731.
- [15] HEINZ H P. On the Behaviour of Measures of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-valued Functions[J]. Nonlinear Analysis, 1983, 7(12): 1351.
- [16] A. PAZY. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [17] CURTAIN R F, FALB P L. Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces[J]. Journal of Differential Equations, 1971, 10(3): 412.
- [18] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis[M], New York: Springer-Verlag, 1985.
- [19] CHEN P, LI Y. Nonlocal Cauchy Problem for Fractional Stochastic Evolution Equations in Hilbert Spaces[J]. Collectanea Mathematica, 2015, 66(1): 63.
- [20] CHEN P, ZHANG X, LI Y. Nonlocal Problem for Fractional Stochastic Evolution Equations with Solution Operators[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2016, 19(6): 1507.
- [21] CUI J, YAN L, WU X. Nonlocal Cauchy Problem for Some Stochastic Integro-differential Equations in Hilbert Spaces[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2012, 41(3): 279.
- [22] LIANG J, LIU J H, XIAO T J. Nonlocal Impulsive Problems for Nonlinear Differential Equations in Banach Spaces[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(3/4): 798.

(编辑:温泽宇)